

# Les comparaisons de moyennes

Xavier Penin

Premiers tests d'hypothèses

# Moyenne et variance des moyennes

Moyenne de  
moyennes

$$\bar{\bar{Y}} = \frac{\sum \bar{Y}}{a}$$

a est le nombre  
d'échantillons de  
*même effectif*

Variance des  
moyennes

$$s^2_{\bar{Y}} = \frac{s^2}{n}$$

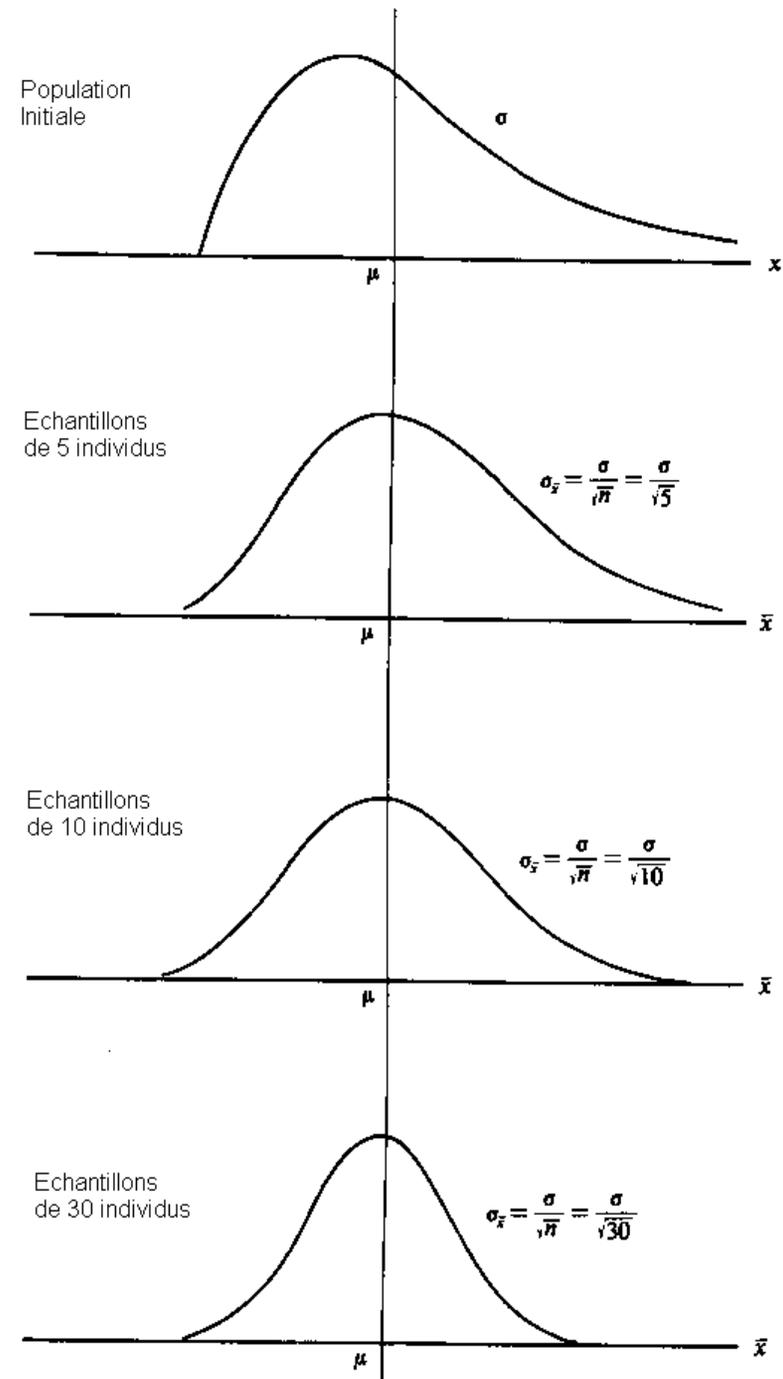
n est l'effectif  
de l'échantillon

et donc:

$$s_{\bar{Y}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

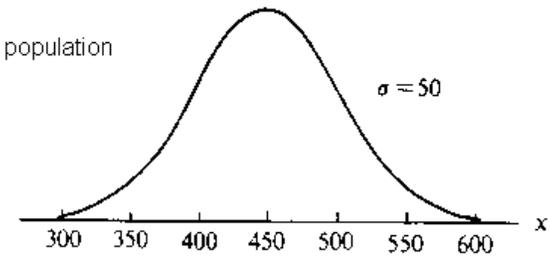
# Le théorème central limite (2)

Plus la taille des échantillons augmente, plus la distribution des moyennes devient Normale

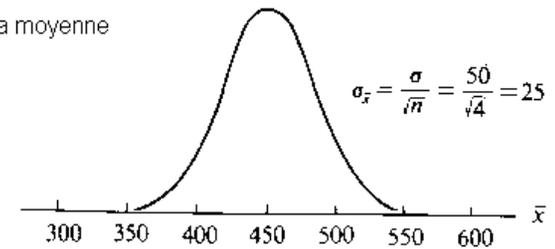


# L'écart-type des moyennes

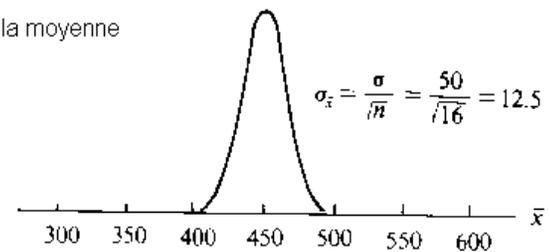
Distribution de la population initiale



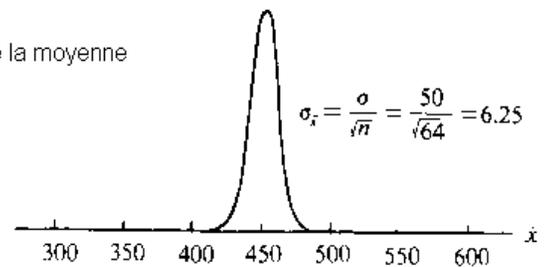
Distribution de la moyenne pour n=4



Distribution de la moyenne pour n=16



Distribution de la moyenne pour n=64

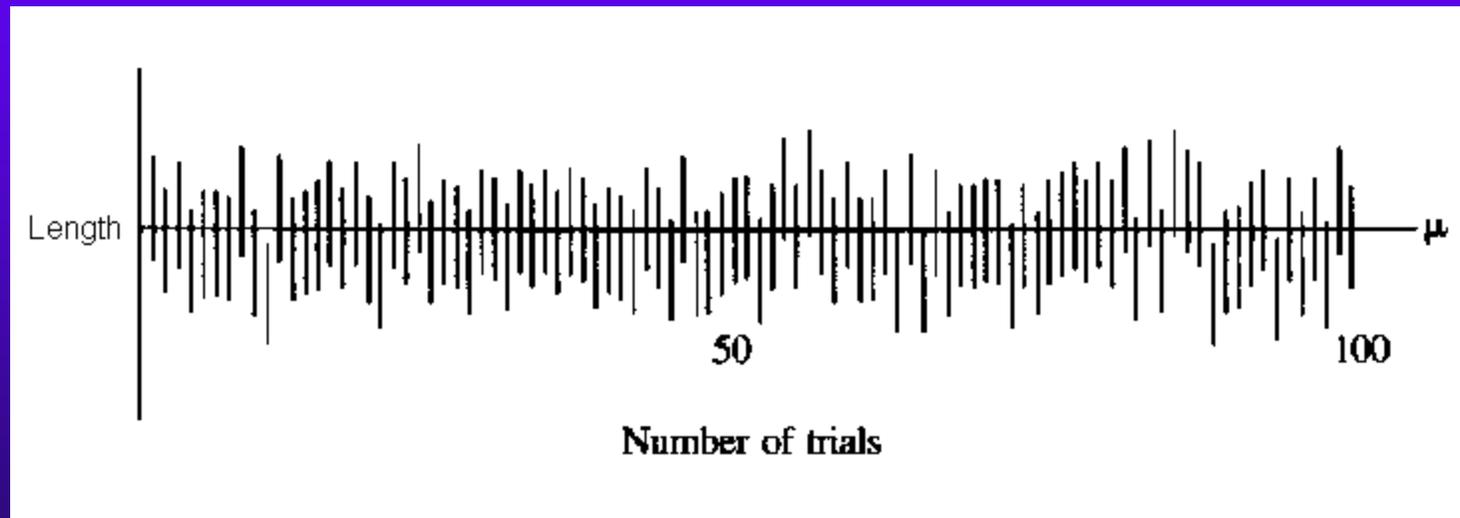


# Le t de Student

Destiné à la comparaison de 2 moyennes,  
ce test est basé sur la distribution t

# Calcul empirique de la distribution t théorique

1. Prélever un grand nombre (1 000 000) d'échantillons de  $n$  individus au sein d'une population de moyenne  $\mu$



2. Calculer la moyenne de chaque échantillon

Suite ->

# Le calcul du t théorique (suite)

3. Calculer les t selon la formule

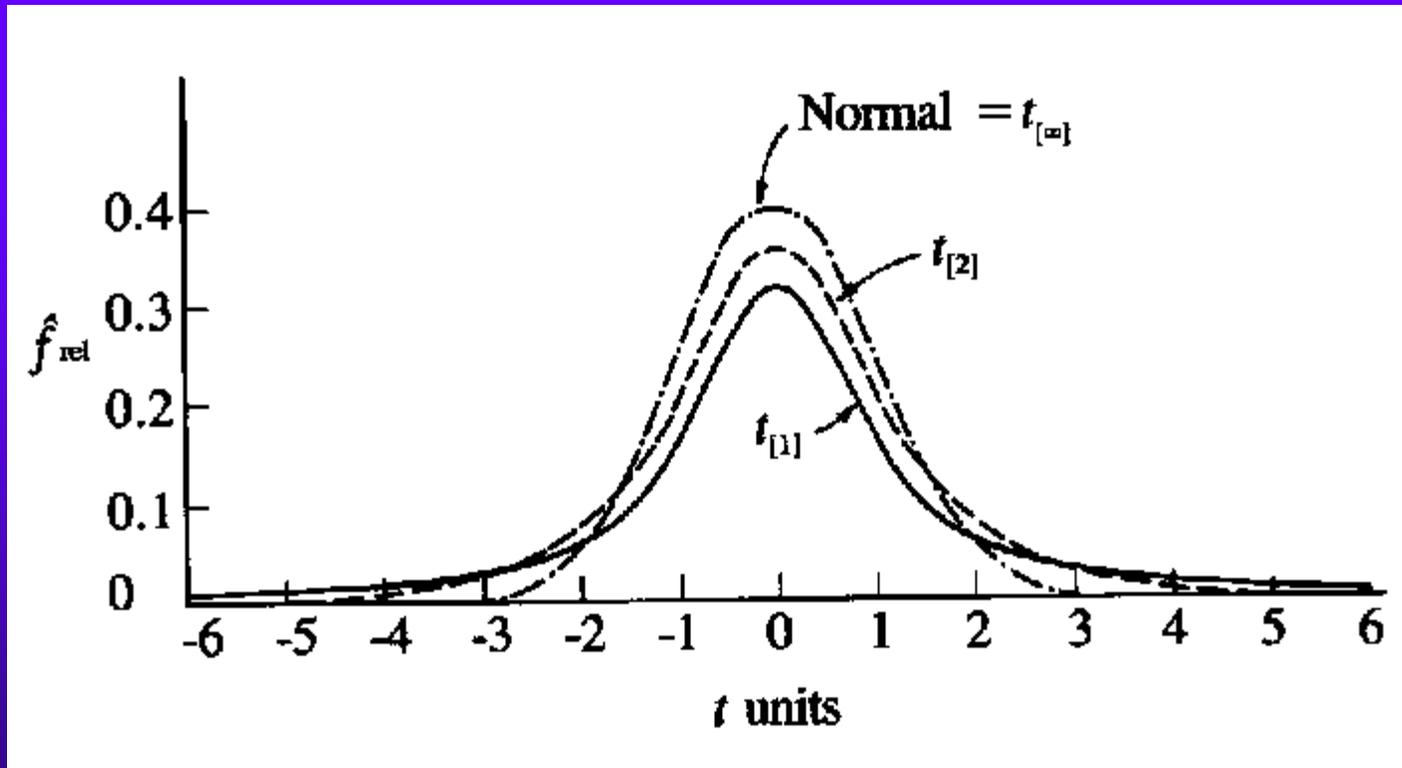
$$t = \frac{\bar{y} - \mu}{s_{\bar{y}}}$$

4. Construire des courbes en fonction de l'effectif n

Rappel :

$$s_{\bar{y}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

# La distribution t



Il y a un paramètre supplémentaire par rapport à Z  
les degrés de liberté. DDL

# Le test t

1. Le calcul du t expérimental :

$$t = \frac{\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{n}}}$$

2. Le calcul des degrés de liberté:

$$DDL = n_1 - 1 + n_2 - 1$$

3. Comparaison avec le t théorique

# Exemple

La mesure d'un angle chez 2 groupes de 4 individus donne les résultats du tableau

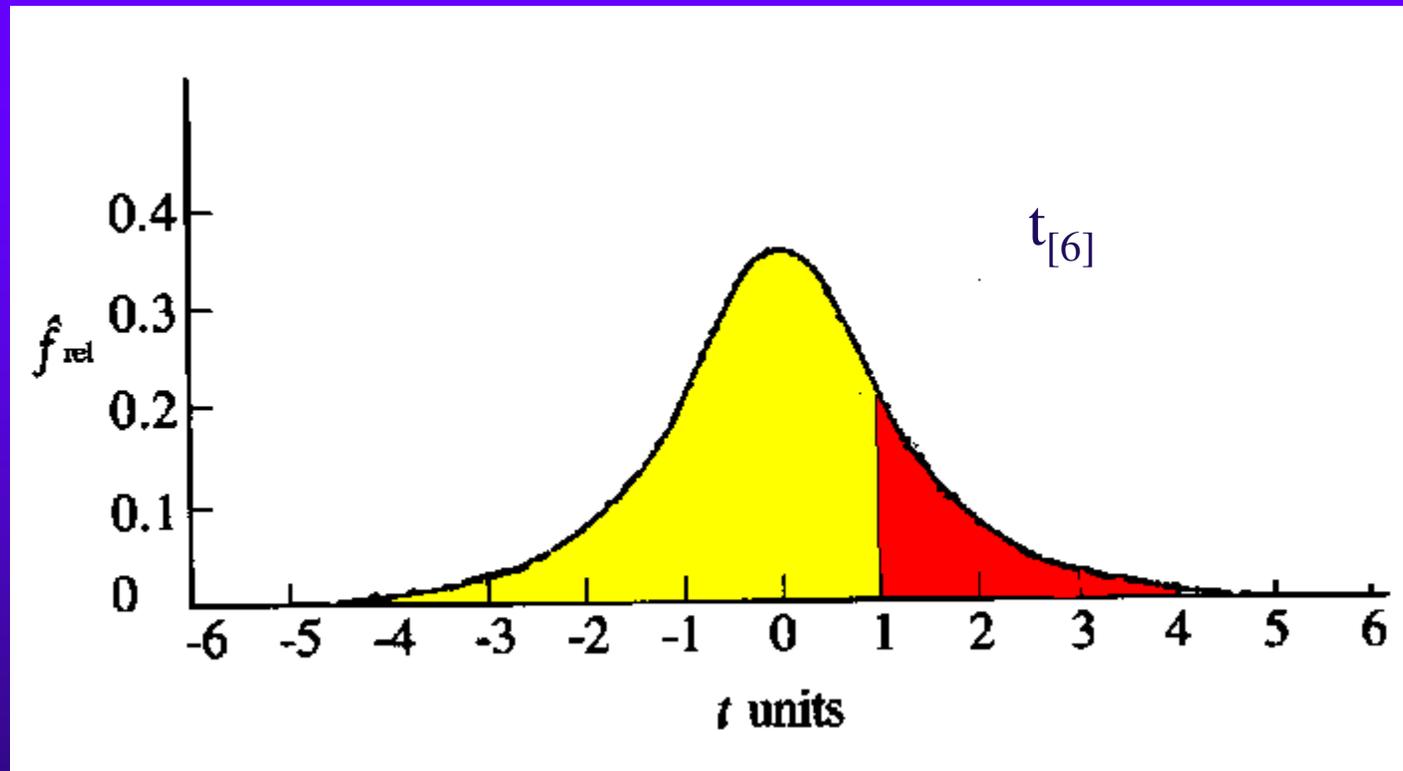
	Groupe 1	Groupe 2
	21	20
	24	23
	25	19
	20	22
Moyenne	22.5	21
S <sup>2</sup>	5.66	3.33

Le t calculé est de :

$$\frac{22.5-21}{\sqrt{\frac{5.66+3.33}{4}}}=1$$

Le DDL :  $4-1+4-1=6$

# Entrée sous la courbe de $t$



Pour  $t=1$  on est dans une zone de fréquence élevée

# Les tests d'hypothèse

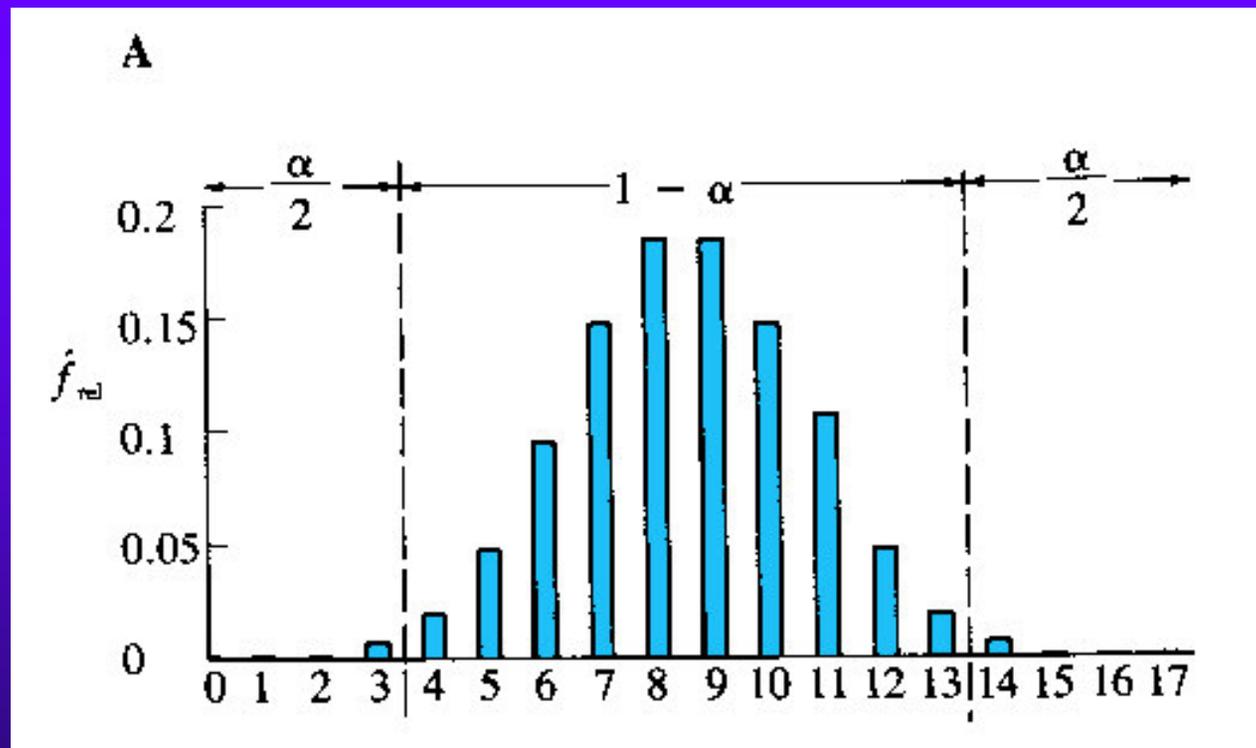
$H_0$  : Hypothèse nulle selon laquelle la statistique calculée est sous la distribution théorique

$H_1$  : Hypothèse alternative selon laquelle la statistique calculée sort des limites de la distribution théorique

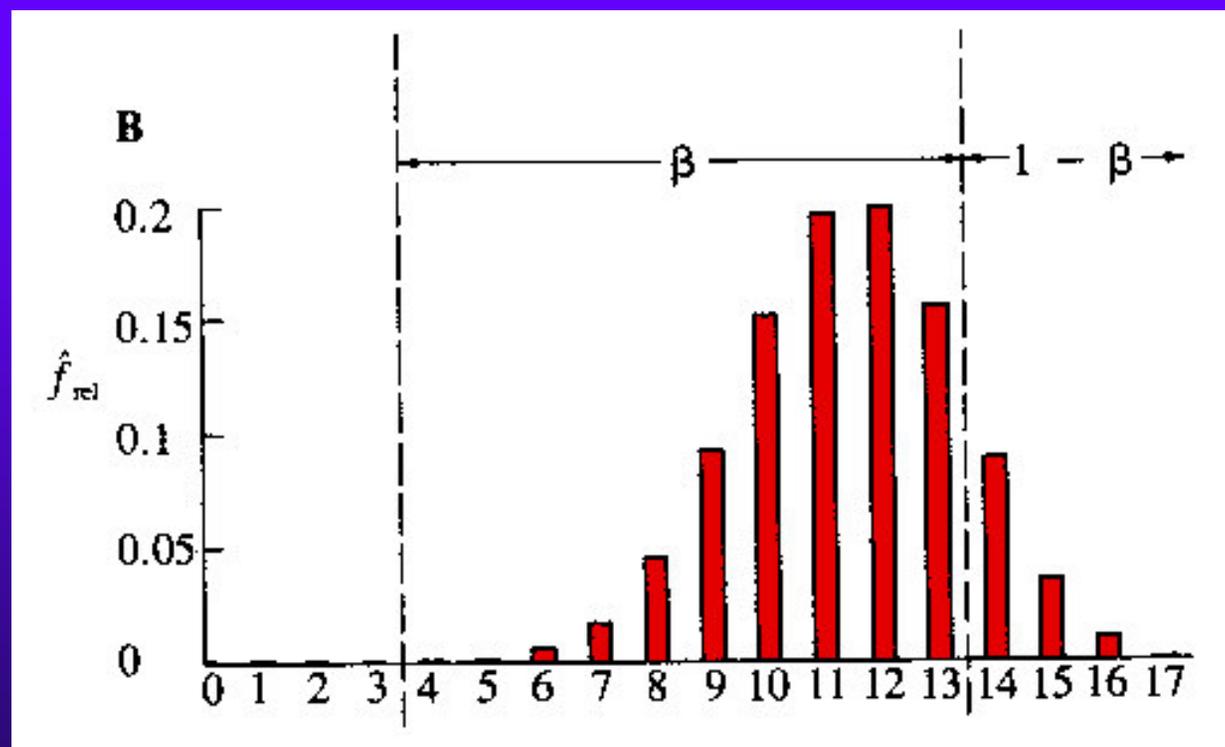
# Classification des erreurs

Hypothèse Nulle	Acceptation	Rejet
Vraie	Bon	Erreur type 1 ( $\alpha$ )
Fausse	Erreur type 2 ( $\beta$ )	Bon

# Erreur de type 1 ou erreur $\alpha$

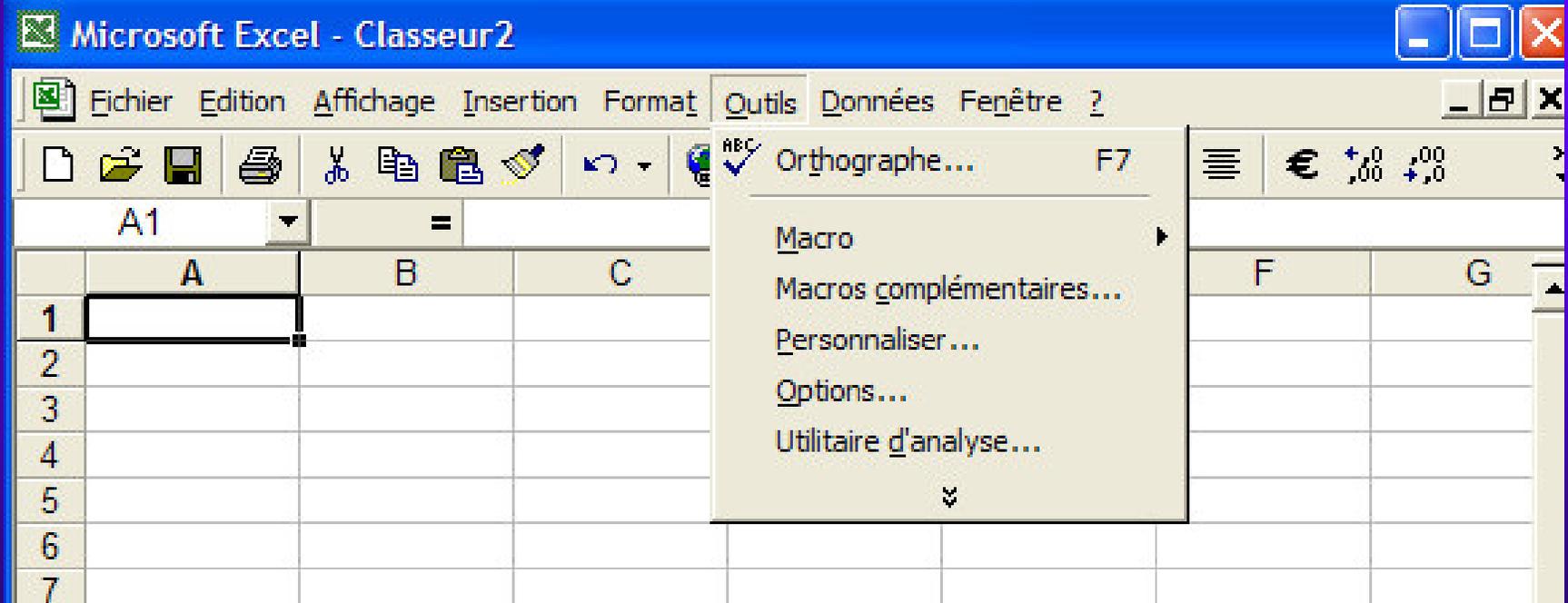


# Erreur de type 2 ou erreur $\beta$

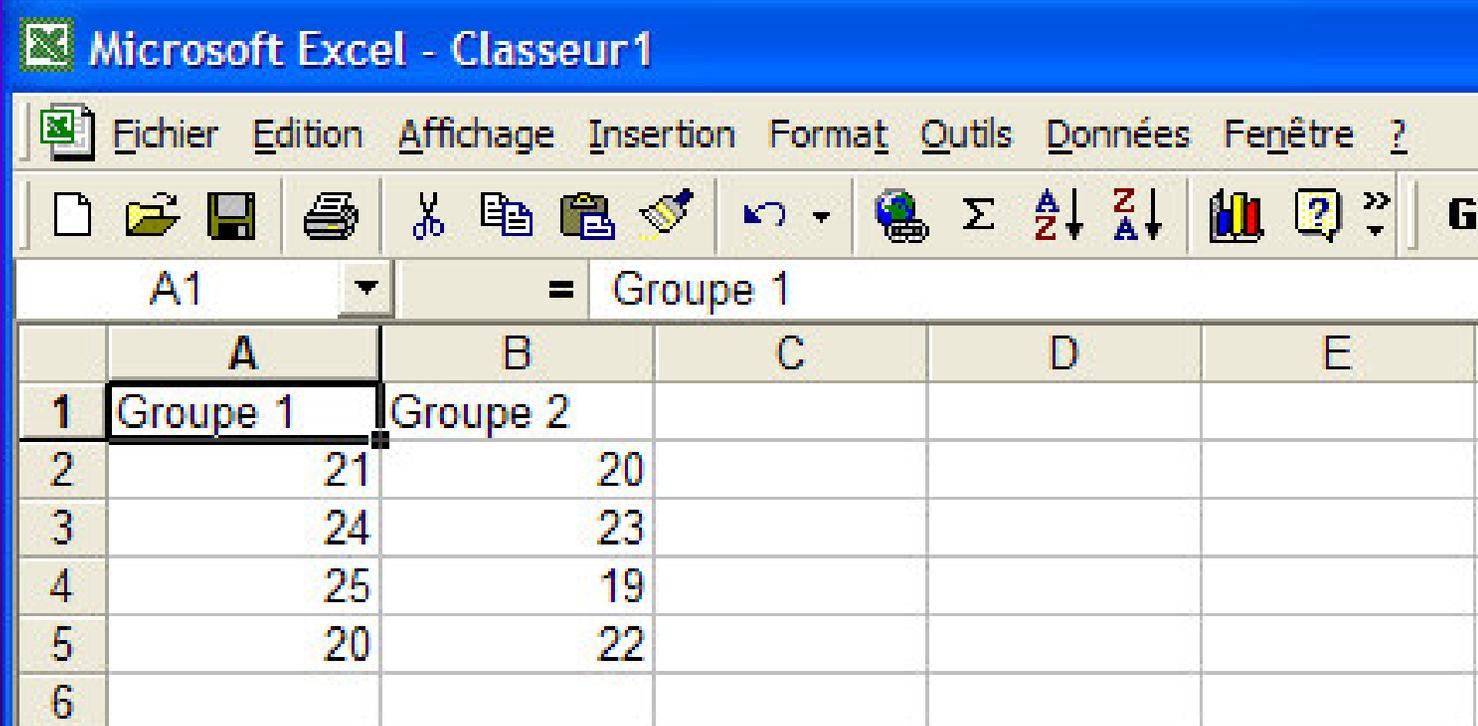


# Microsoft Excel :

## Installation des utilitaires d'analyse



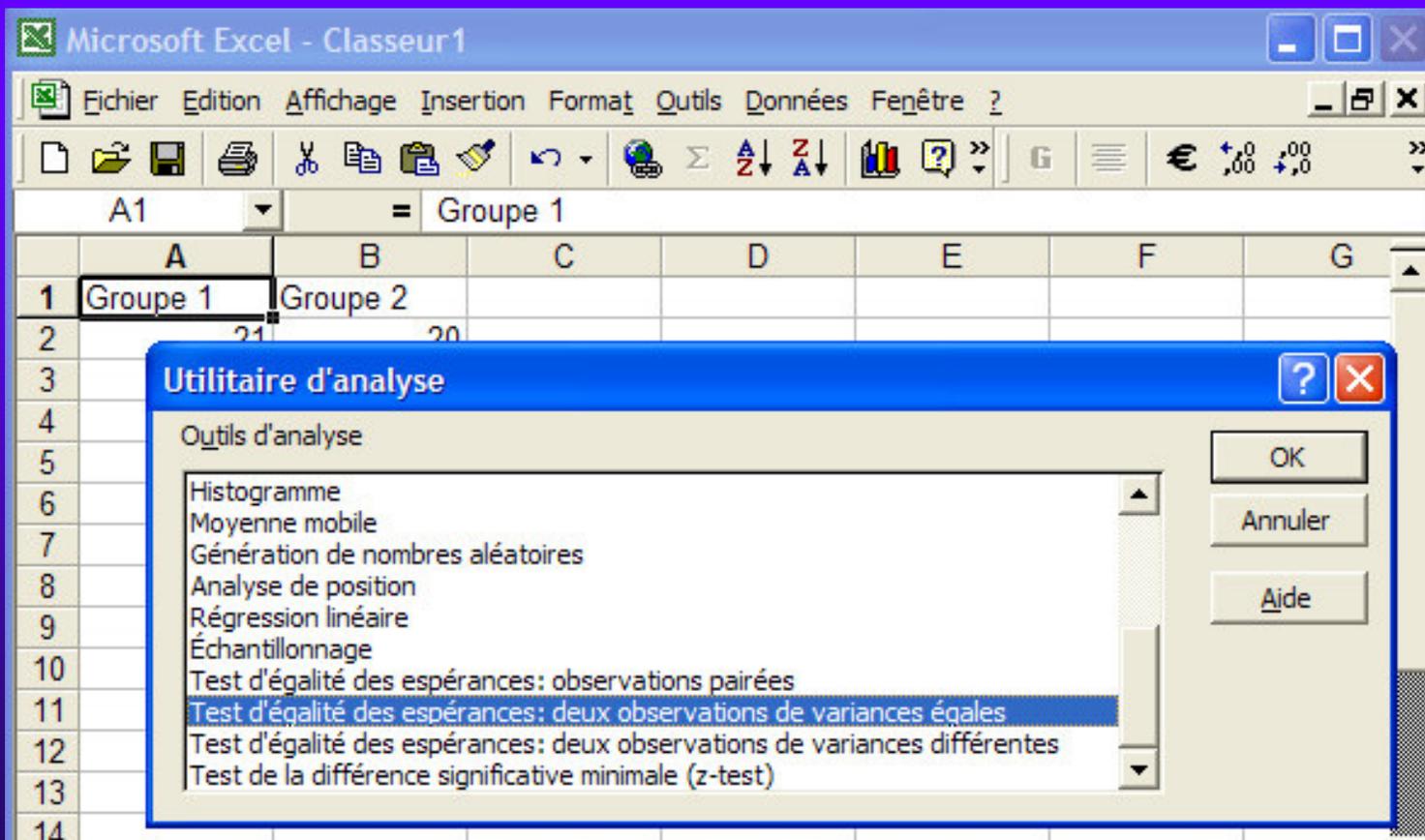
# Présentation des données



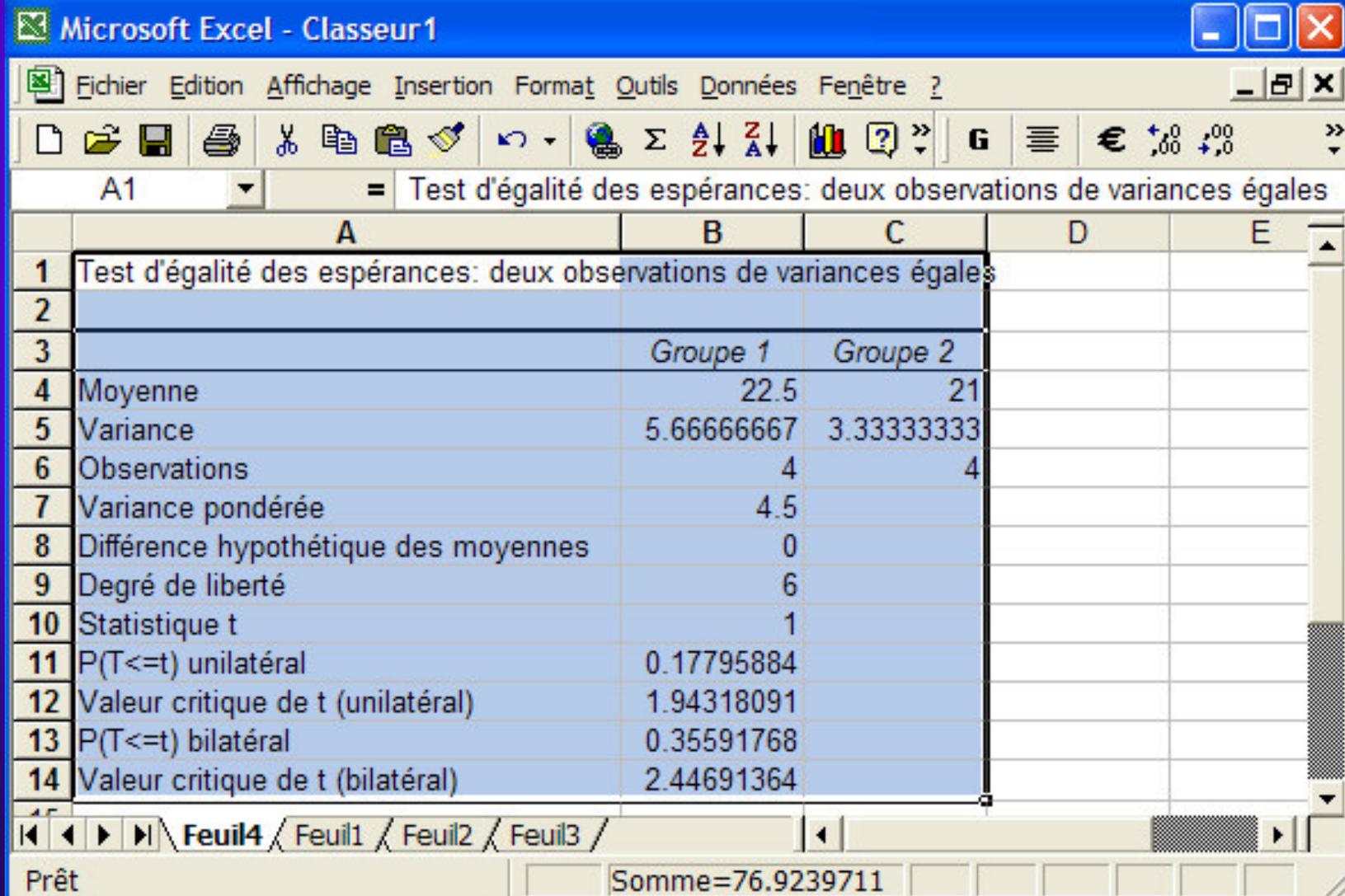
The screenshot shows the Microsoft Excel interface. The title bar reads "Microsoft Excel - Classeur1". The menu bar includes "Fichier", "Edition", "Affichage", "Insertion", "Format", "Outils", "Données", and "Fenêtre ?". The toolbar contains various icons for file operations, editing, and data analysis. The formula bar shows "A1" and "= Groupe 1". The spreadsheet has columns A through E and rows 1 through 6. The data is as follows:

	A	B	C	D	E
1	Groupe 1	Groupe 2			
2	21	20			
3	24	23			
4	25	19			
5	20	22			
6					

# Sélection de l'outil d'analyse



# Présentation des résultats



Microsoft Excel - Classeur1

Fichier Edition Affichage Insertion Format Outils Données Fenêtre ?

A1 = Test d'égalité des espérances: deux observations de variances égales

	A	B	C	D	E
1	Test d'égalité des espérances: deux observations de variances égales				
2					
3		<i>Groupe 1</i>	<i>Groupe 2</i>		
4	Moyenne	22.5	21		
5	Variance	5.66666667	3.33333333		
6	Observations	4	4		
7	Variance pondérée	4.5			
8	Différence hypothétique des moyennes	0			
9	Degré de liberté	6			
10	Statistique t	1			
11	P(T<=t) unilatéral	0.17795884			
12	Valeur critique de t (unilatéral)	1.94318091			
13	P(T<=t) bilatéral	0.35591768			
14	Valeur critique de t (bilatéral)	2.44691364			

Prêt

Somme=76.9239711

# La puissance

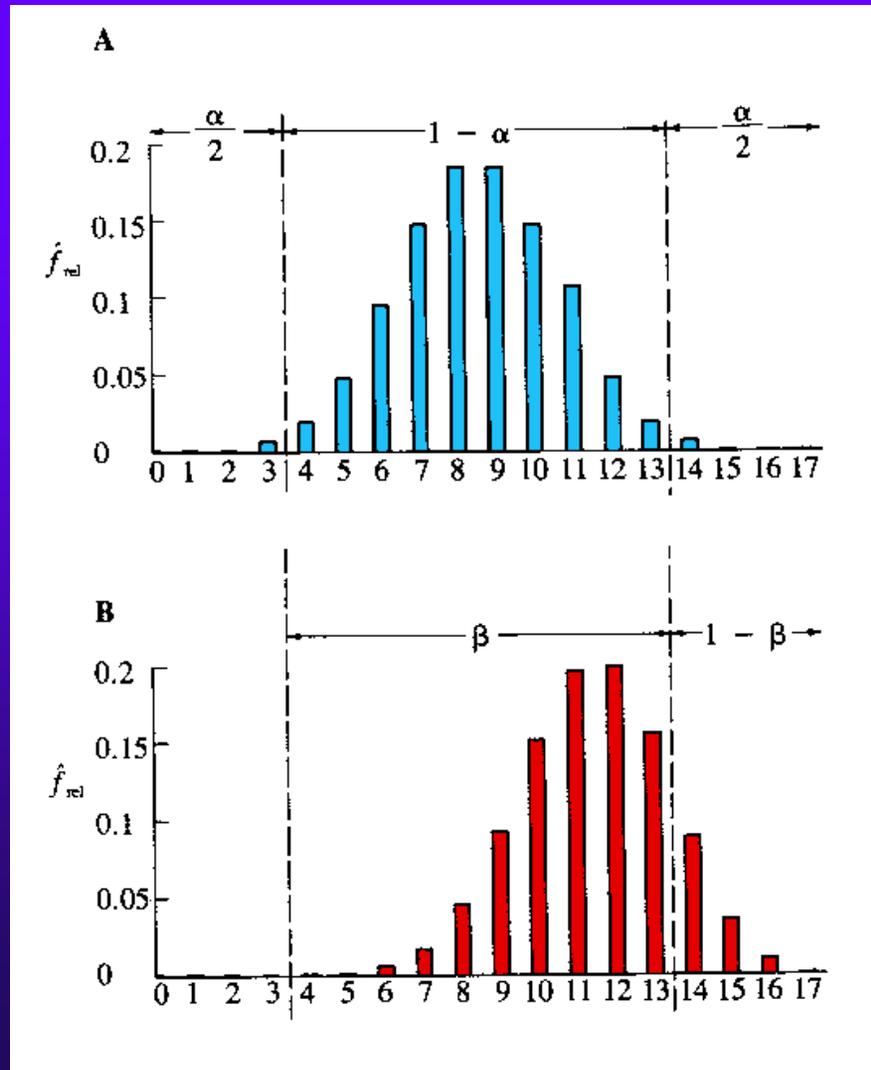
Aptitude d'un test à éviter l'erreur  $\beta$  et donc vérifier  $1-\beta$

Aptitude à rejeter de façon justifiée une hypothèse nulle fausse

# Éléments qui ont une influence sur la puissance

1. La significativité
2. La différence entre  $H_0$  et  $H_1$
3. Les effectifs des échantillons

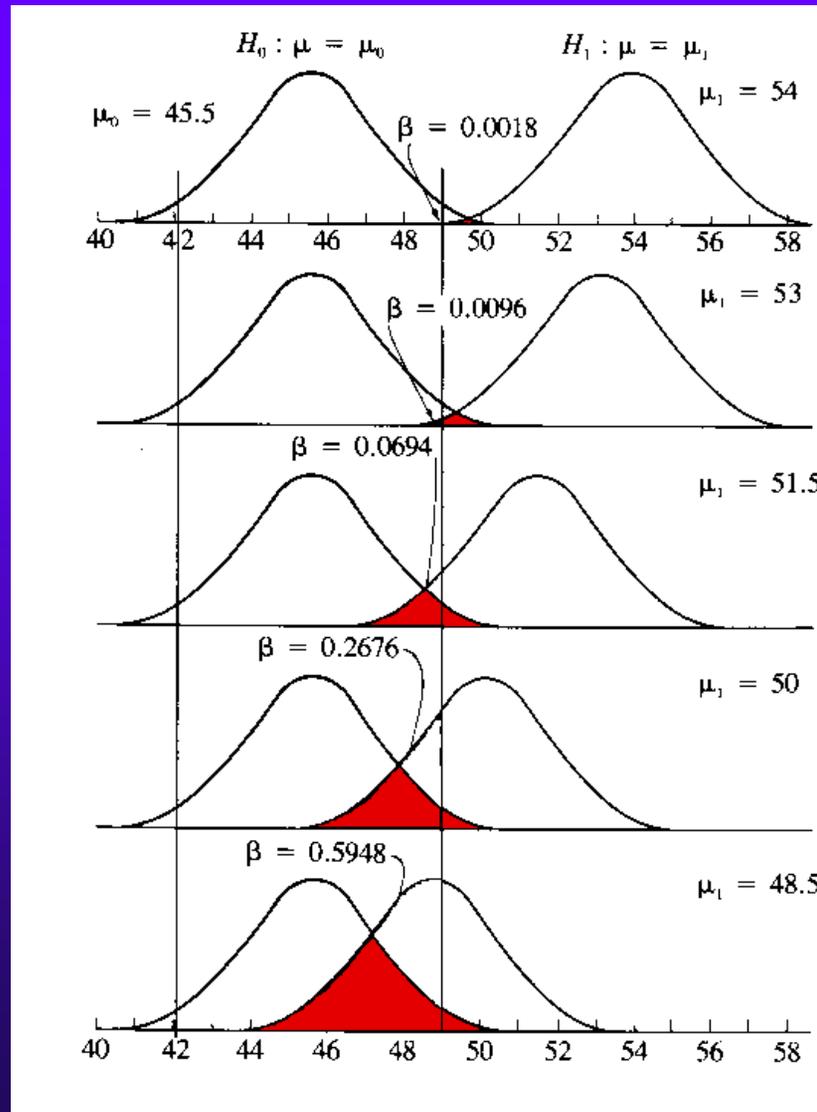
# Relation entre $\alpha$ et $\beta$



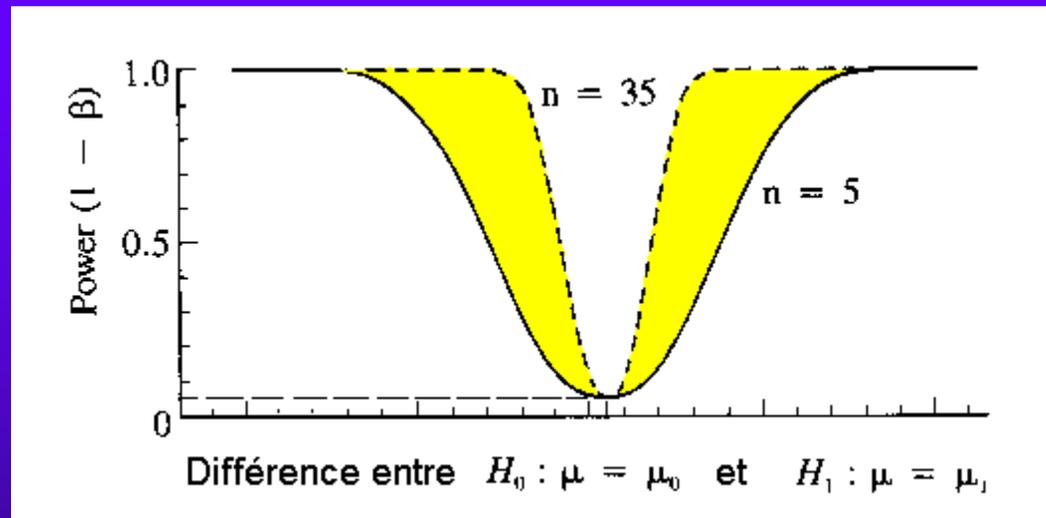
Si le seuil  $\alpha$   
augmente  
le risque  $\beta$   
augmente aussi

La **puissance**  
d'un test est sa  
capacité à  
minimiser le  
risque  $\beta$

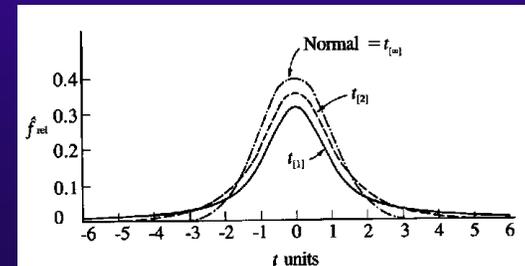
# Puissance et relation entre $H_0$ et $H_1$



# Puissance et effectifs



Plus les effectifs augmentent  
Plus la puissance augmente



# Étapes d'une étude statistique

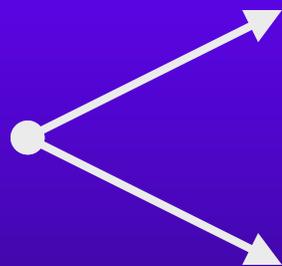
1. Énoncé de  $H_0$  et  $H_1$
2. Choix de la statistique (moyenne, variance ...)
3. Choix de la distribution ( $Z$ ,  $t$ ,  $F$ ,  $\chi^2$  ...)
4. Constitution de l'échantillon
5. Calculs et comparaisons
6. Prise de décision

# Conditions d'application des tests

- Normalité
- Homoscédasticité
- Sélection aléatoire des spécimens
- Indépendance des observations

# Test t pour observations pairées

Thérapeutique



Évolution d'une variable  
à des stades successifs

Les variables ne sont pas  
indépendantes

# Définition d'une nouvelle variable

1. Variable différence  $\Delta = x_1 - x_2$
2. Calcul de sa variance:  $S^2_{\Delta}$
3.  $t_{\Delta}$ :

$$t = \frac{\bar{\Delta} - 0}{\sqrt{\frac{S^2_{\Delta}}{n}}}$$

Le nombre de DDL est égal au nombre de  $\Delta - 1$

# Exemple

	Début de traitement	Fin de traitement	Différence
#1	98	99	1
#2	89	91	2
#3	89	89	0
#4	90	91	1
#5	89	90	1
<b>Moyenne</b>	<b>91</b>	<b>92</b>	<b>1</b>

La variation de l'axe facial entre début et fin de traitement  
 $H_0$  est l'hypothèse qu'il n'y aurait pas de différence

# Les calculs

On a donc un t calculé égal à :

avec 4 DDL

$$3.16 = \frac{1-0}{\sqrt{\frac{0.5}{5}}}$$

et une hypothèse nulle  $H_0$  qu'il n'y a pas de différence au seuil de  $p < 0.05$

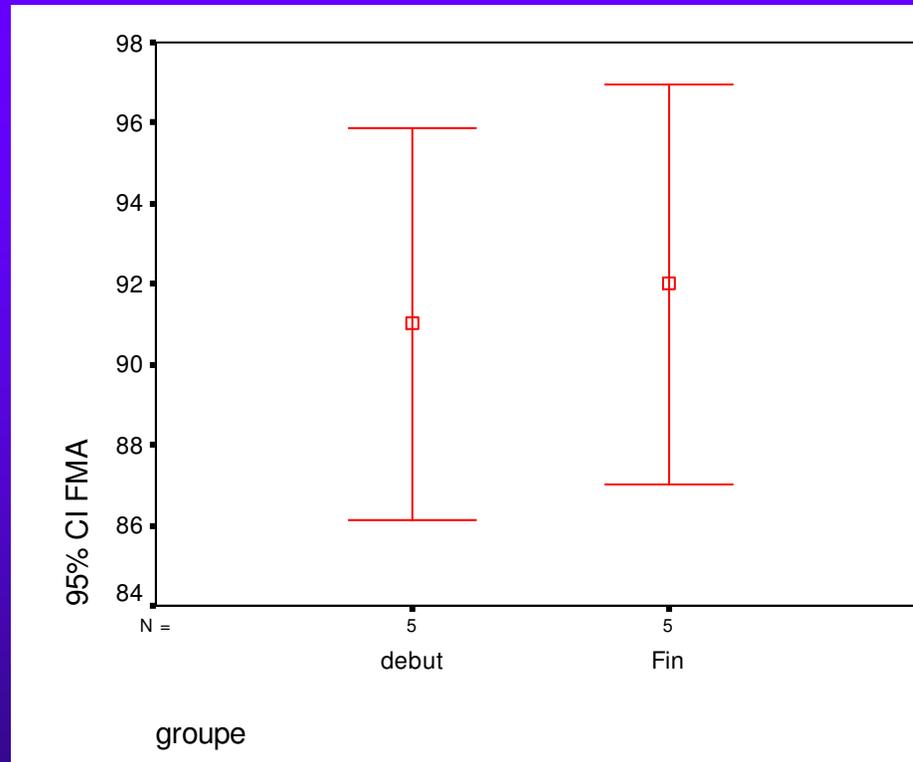
# L'entrée dans la table

DDL	p = 0.20	p = 0.10	p = 0.05	p = 0.02	p = 0.01	p = 0.001
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.656	636.578
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.600
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587

Pour  $H_0$  le t est égal à 2.77 alors que  
le t calculé pour 4 DDL est égal à 3.16

On rejette donc  $H_0$  selon laquelle il n'y  
aurait pas de différence liée au traitement

# Comparaison de résultats



Test t non pairé :  $t < 0.4$

# La robustesse

Est la tolérance du test au  
non respect des  
hypothèses de départ